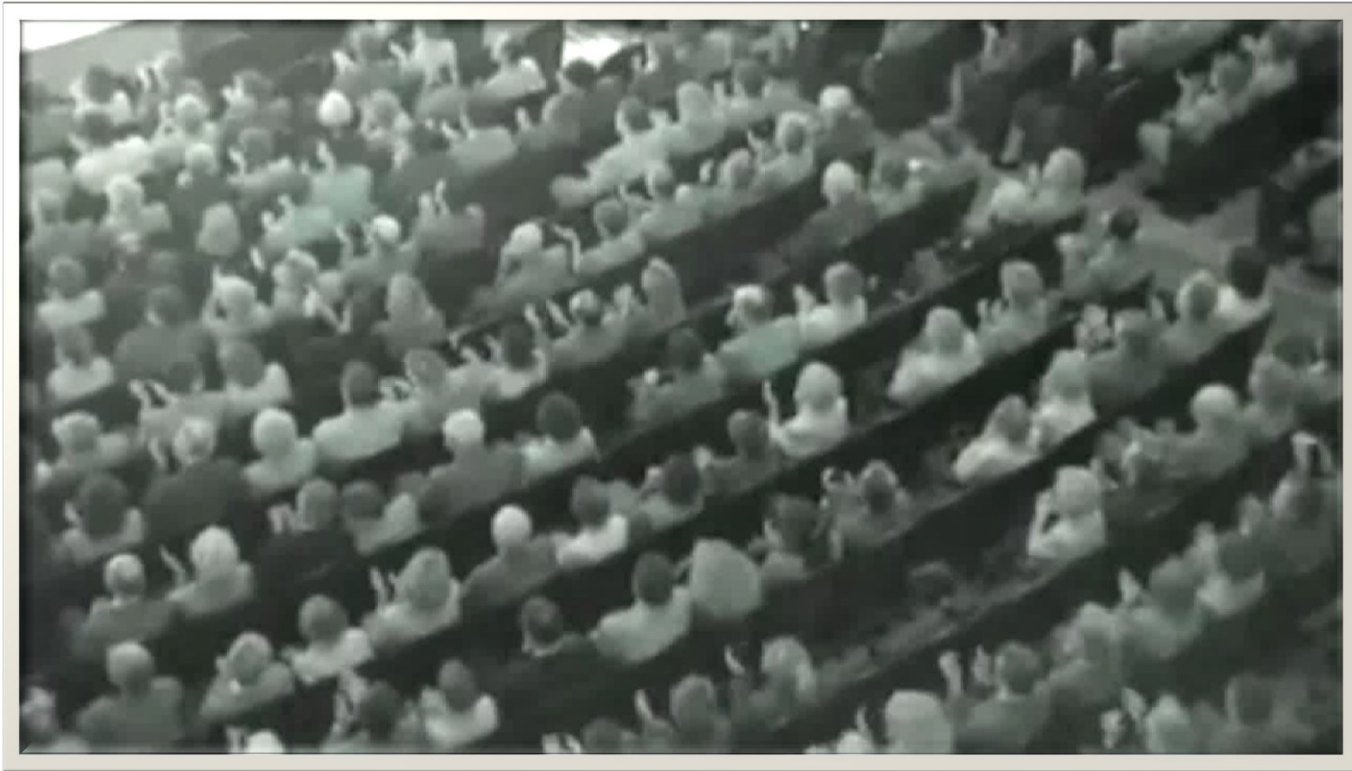


Modelowanie zjawisk kolektywnych

Synchronizacja

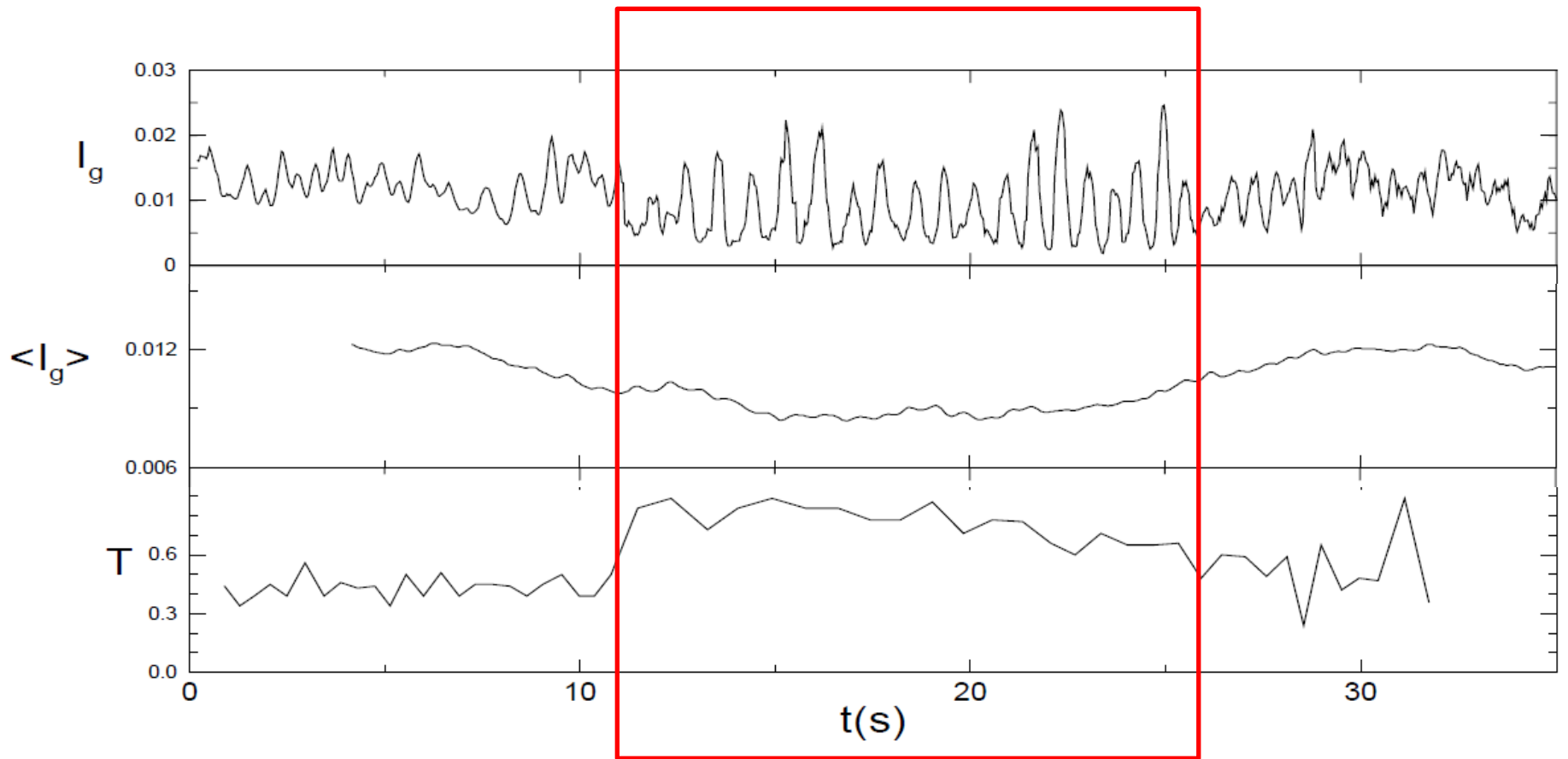
dr hab. Piotr Fronczak



<https://www.youtube.com/watch?v=Go8jd8CSqzY>



<https://www.youtube.com/watch?v=GRRtdpiyQMo>



Z. Nédá, E. Ravasz, T. Vicsek, Y. Brechet, and A. L. Barabási
Physics of the rhythmic applause
Phys. Rev. E 61, 6987 (2000)

Model Kuramoto

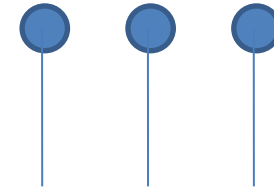
Dany jest zbiór N rotatorów.

Tempo zmiany fazy θ_k rotatora k

$$\frac{d\theta_k}{dt} = \omega_k + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_k)$$

↑
naturalna
częstość
oscylatora

↙
amplituda
sprzężenia



Gdy rotator k opóźnia się
względem średniego rotatora

$$\sin(\bar{\theta} - \theta_k) > 0$$

$\Rightarrow$ rotator przyśpiesza

Gdy rotator k śpieszy się
względem średniego rotatora

$$\sin(\bar{\theta} - \theta_k) < 0$$

$\Rightarrow$ rotator zwalnia

Zatem, gdy $K > 0$, fazy
rotatorów powinny się
synchronizować

Przypadek: dwa sprzężone rotatory o różnych częstościach $\omega_2 > \omega_1$

$$\begin{aligned}\dot{\theta}_1 &= \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\theta_2 - \theta_1) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 + \frac{K}{2} \sin(\theta_1 - \theta_2)\end{aligned}$$

Niech różnica faz $x = \theta_2 - \theta_1$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \delta\omega + \frac{K}{2} [\sin(-x) - \sin(x)] \\ \dot{x} &= \delta\omega - K \sin(x)\end{aligned}$$

Układ ma rozwiązania stacjonarne, gdy $\sin(x) = \frac{\delta\omega}{K}$

← różnica naturalnych częstości mała

$$\left| \frac{\delta\omega}{K} \right| \leq 1$$

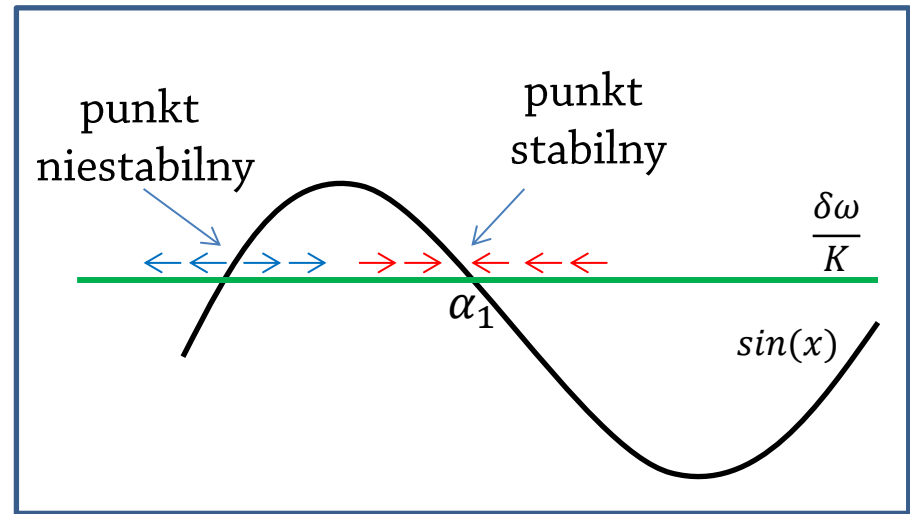
← amplituda sprzężenia duża

Mamy dwa rozwiązania

$$\alpha_1 = \arcsin\left(\frac{\delta\omega}{K}\right)$$

$$\alpha_2 = \pi - \alpha_1$$

$$\theta_2 = \theta_1 + \alpha_1$$



Czyli szybszy (w sensie naturalnej częstości) oscylator wyprzedza wolniejszy o stałą fazę.

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 + \frac{K}{2} \sin(\alpha_1) \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 - \frac{K}{2} \sin(\alpha_1) \end{aligned} \quad \left\{ \sin(\alpha_1) = \frac{\omega_2 - \omega_1}{K} \right\}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= \omega_1 + \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \bar{\omega} \\ \dot{\theta}_2 &= \omega_2 - \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \bar{\omega} \end{aligned}$$

$$\left| \frac{\delta\omega}{K} \right| \leq 1$$

$$K > K_C = |\omega_2 - \omega_1|$$

Czyli, gdy amplituda sprzężenia przekracza pewną krytyczną wartość zależną od różnicy naturalnych częstości rotatorów, to oba rotatory synchronizują się.

Gdy mamy $N \gg 1$ rotatorów o częstościach $\omega \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, to można pokazać, że

$$K > K_c = |\omega_2 - \omega_1|$$



$$K > K_c = A\delta$$

Im większa dyspersja, tym trudniej zsynchronizować rotatory.

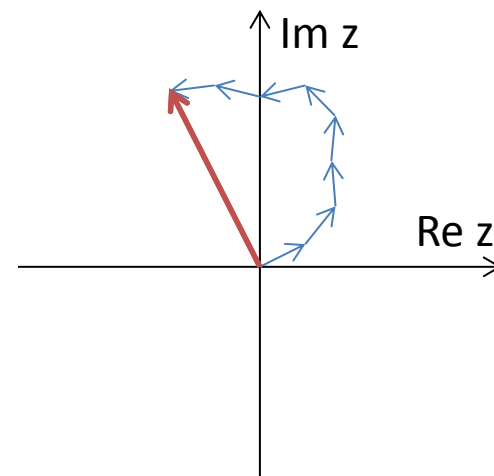
Parametr porządku – miara synchronizacji

Liczba zespolona $z = re^{i\theta} \equiv$ wektor reprezentujący rotator

Suma liczb zespolonych $Z = \sum_{n=1}^N z_n = \sigma e^{i\Phi} \equiv$ nowy wektor

Niech długość rotatorów stała $r = 1/N$, a faza $\theta_n(t)$.

$$Z = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e^{i\theta_n(t)} = \langle e^{i\theta_n(t)} \rangle = \sigma(t) e^{i\Phi(t)}$$



Niech $\theta_n(t) = \Omega t + a_n$.

$$\sigma(t) e^{i\Phi(t)} = e^{i\Omega t} \langle e^{ia_n} \rangle$$

←
Częstotliwość
zsynchronizowanych
rotatorów

←
Długość wynikowego
wektora – jakość
synchronizacji

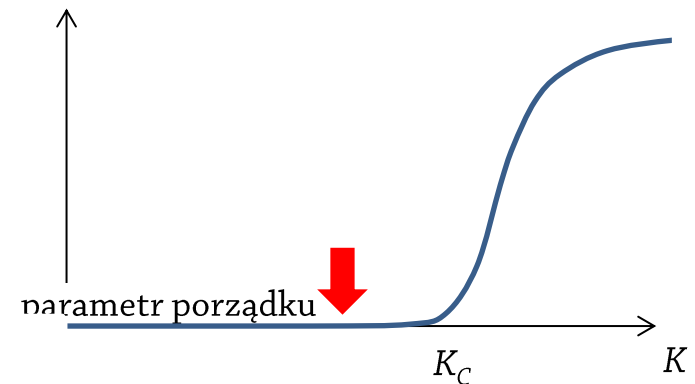
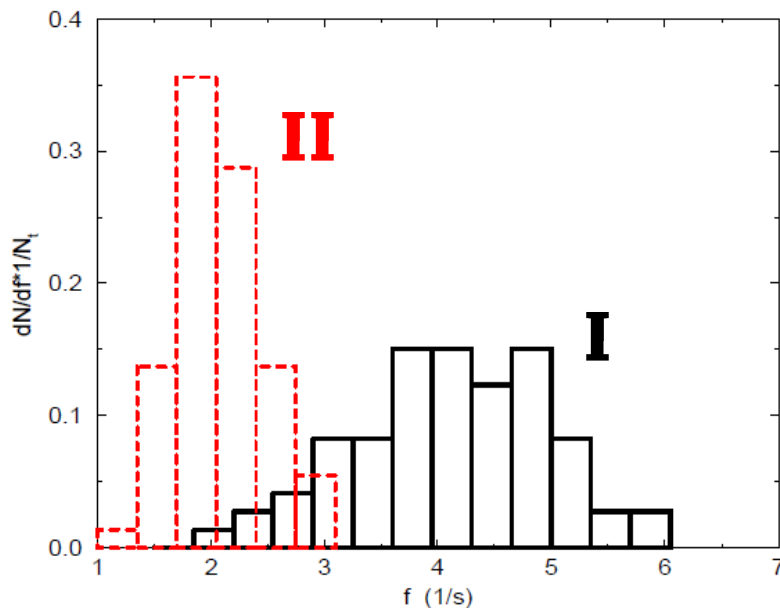
Parametr porządku

$$\sigma = \langle e^{ia_n} \rangle$$

DEMO

Dwa mody:

- I. Klaszcie (klaskajcie?), jak po dobrym występie
- II. j.w., ale spróbujcie to zrobić synchronicznie



1. Entuzjastycznie nastawieni widzowie klaszczą w modzie I (z dużą dyspersją $\sigma = AK_C$).
2. Chcąc podkreślić swój zachwyt, zwalniają rytm (bo tylko tak można zmniejszyć dyspersję i K_C). Przechodzimy do modu II.
3. Spada natężenie braw. Musimy klaskać szybciej. Rośnie dyspersja. Tracimy synchronizację. Powracamy do modu I.

Funny facts

Klaskanie synchroniczne zależy od społeczeństwa



W krajach demokracji ludowej, po przemowach wodzów, klaskanie synchroniczne nigdy się nie pojawiało, a jeśli już, to nigdy nie zanikało. Wniosek?



Model synchronizacji oscylatorów biologicznych

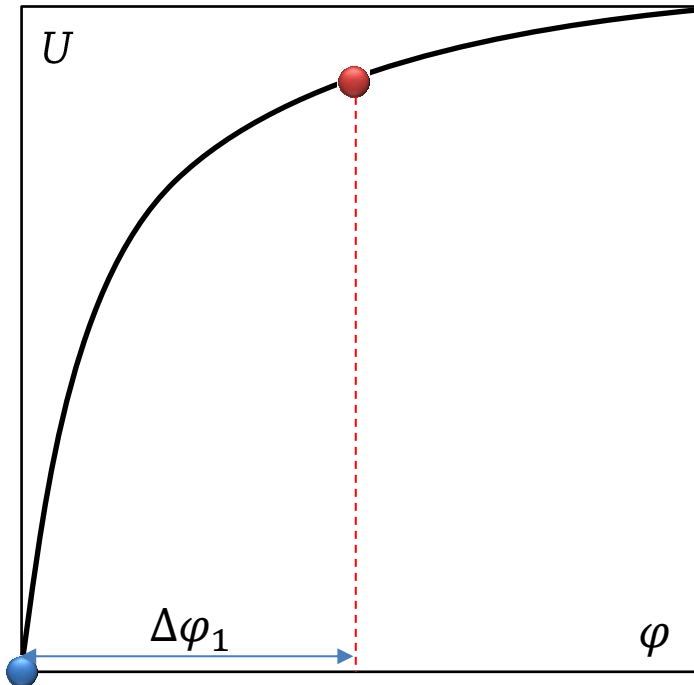
Mamy N oscylatorów, których stan (naładowania lub napięcia) opisany jest wzorem:

$$U(\varphi) = C(1 - e^{-\gamma\varphi})$$

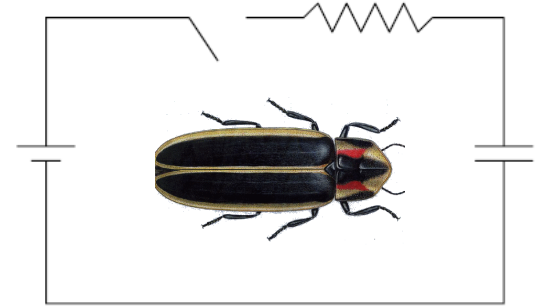
$\varphi = \varphi(t)$ - faza oscylatora

Jeżeli $U(\varphi) = 1$, to następuje rozładowanie oscylatora (rozbłąsk), $\varphi = 0$ i $U(0) = 0$.

Rozbłąsk powoduje skok naładowania u innych sprzężonych oscylatorów o ε .



fizyczny model świetlika



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{Q}{C} \right)$$

Weźmy dwa oscylatory.

Renato E. Mirollo, Steven H. Strogatz

Synchronization of pulse-coupled biological oscillators
SIAM J. on Applied Math., vol. 50, pp. 1645 – 1662 (1990)

Model synchronizacji oscylatorów biologicznych

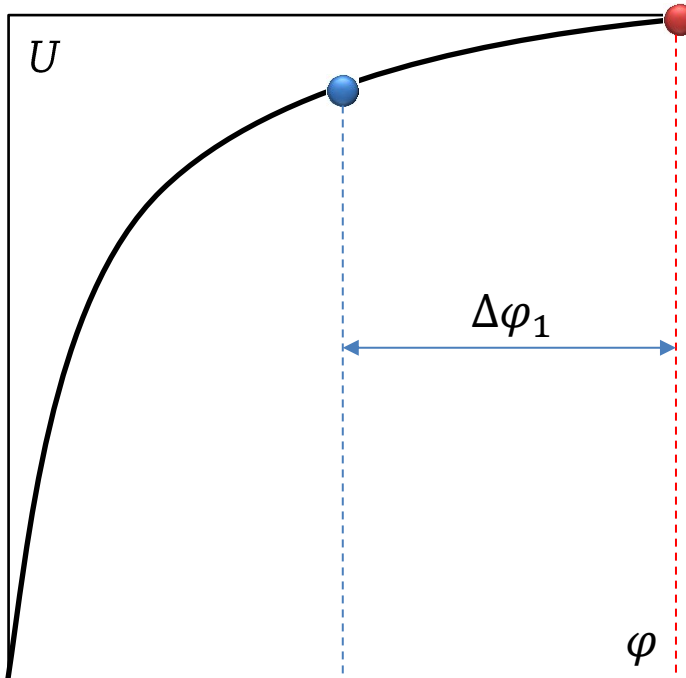
Mamy N oscylatorów, których stan (naładowania lub napięcia) opisany jest wzorem:

$$U(\varphi) = C(1 - e^{-\gamma\varphi})$$

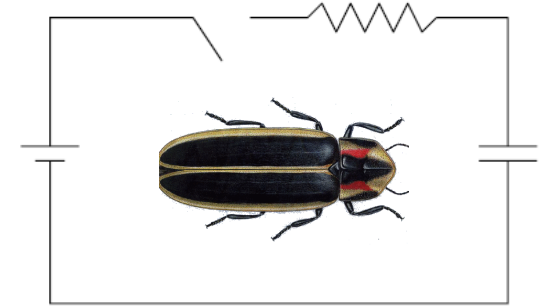
$\varphi = \varphi(t)$ - faza oscylatora

Jeżeli $U(\varphi) = 1$, to następuje rozładowanie oscylatora (rozbłysk), $\varphi = 0$ i $U(0) = 0$.

Rozbłysk powoduje skok naładowania u innych sprzężonych oscylatorów o ε .



fizyczny model świetlika



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{Q}{C} \right)$$

Weźmy dwa oscylatory.

Stan tuż przed rozbłyskiem czerwonego oscylatora.

Model synchronizacji oscylatorów biologicznych

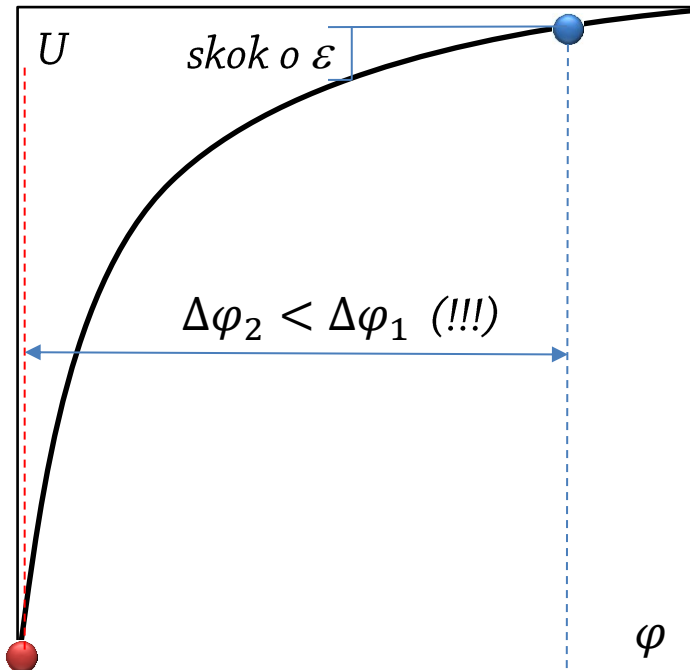
Mamy N oscylatorów, których stan (naładowania lub napięcia) opisany jest wzorem:

$$U(\varphi) = C(1 - e^{-\gamma\varphi})$$

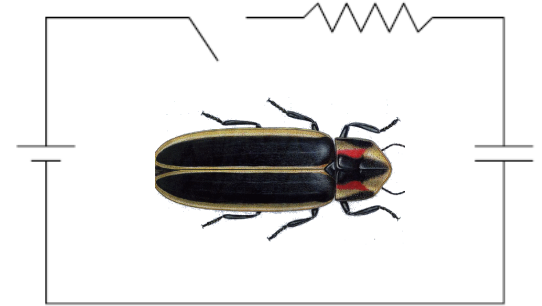
$\varphi = \varphi(t)$ - faza oscylatora

Jeżeli $U(\varphi) = 1$, to następuje rozładowanie oscylatora (rozbłysk), $\varphi = 0$ i $U(0) = 0$.

Rozbłysk powoduje skok naładowania u innych sprzężonych oscylatorów o ε .



fizyczny model świetlika



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{Q}{C} \right)$$

Weźmy dwa oscylatory.

Stan tuż po rozbłysku czerwonego oscylatora.

Model synchronizacji oscylatorów biologicznych

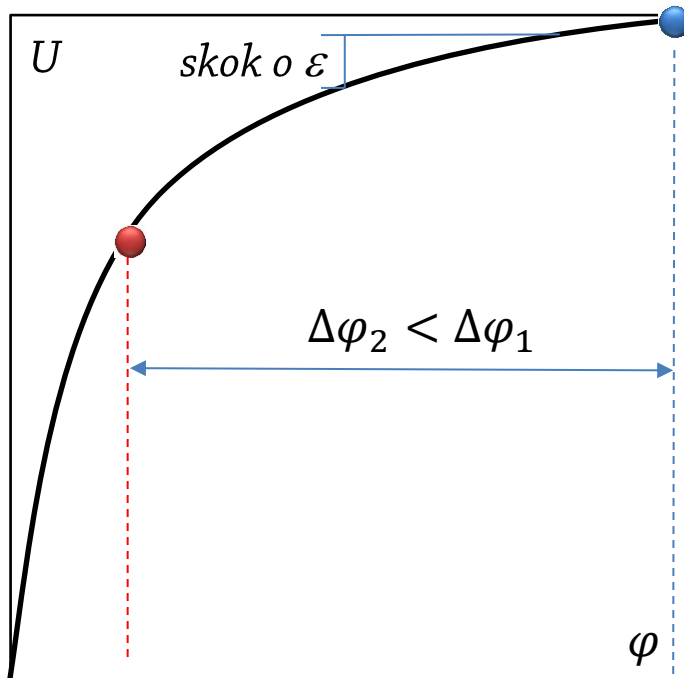
Mamy N oscylatorów, których stan (naładowania lub napięcia) opisany jest wzorem:

$$U(\varphi) = C(1 - e^{-\gamma\varphi})$$

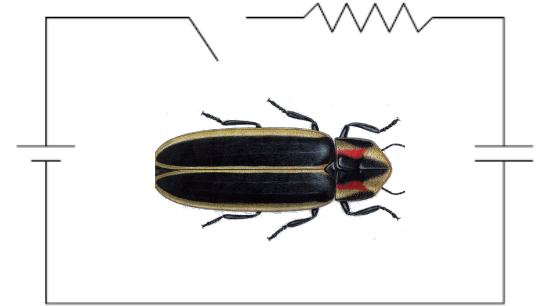
$\varphi = \varphi(t)$ - faza oscylatora

Jeżeli $U(\varphi) = 1$, to następuje rozładowanie oscylatora (rozbłąsk), $\varphi = 0$ i $U(0) = 0$.

Rozbłąsk powoduje skok naładowania u innych sprzężonych oscylatorów o ε .



fizyczny model świetlika



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{Q}{C} \right)$$

Weźmy dwa oscylatory.

Stan tuż przed rozbływem
niebieskiego oscylatora.

Renato E. Mirollo, Steven H. Strogatz

Synchronization of pulse-coupled biological oscillators
SIAM J. on Applied Math., vol. 50, pp. 1645 – 1662 (1990)

Model synchronizacji oscylatorów biologicznych

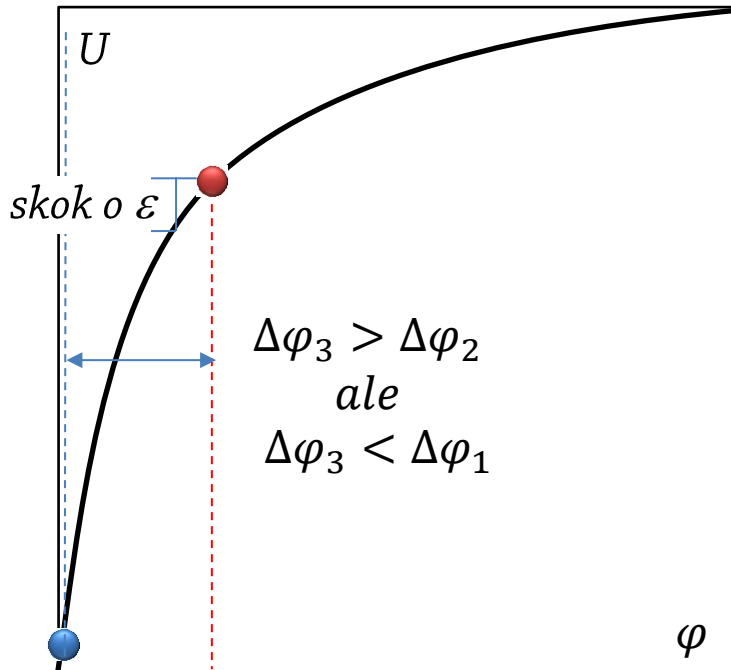
Mamy N oscylatorów, których stan (naładowania lub napięcia) opisany jest wzorem:

$$U(\varphi) = C(1 - e^{-\gamma\varphi})$$

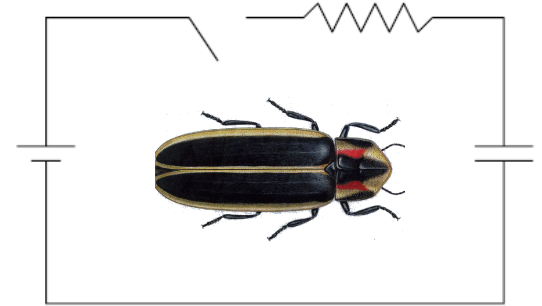
$\varphi = \varphi(t)$ - faza oscylatora

Jeżeli $U(\varphi) = 1$, to następuje rozładowanie oscylatora (rozbłysk), $\varphi = 0$ i $U(0) = 0$.

Rozbłysk powoduje skok naładowania u innych sprzężonych oscylatorów o ε .



fizyczny model świetlika



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{R} \left(\varepsilon - \frac{Q}{C} \right)$$

Weźmy dwa oscylatory.

Stan tuż po rozbłyku niebieskiego oscylatora.

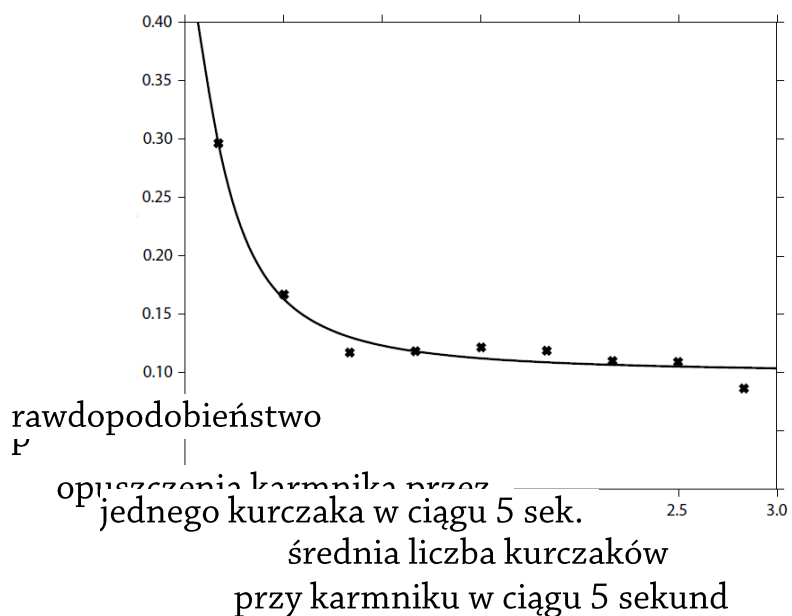
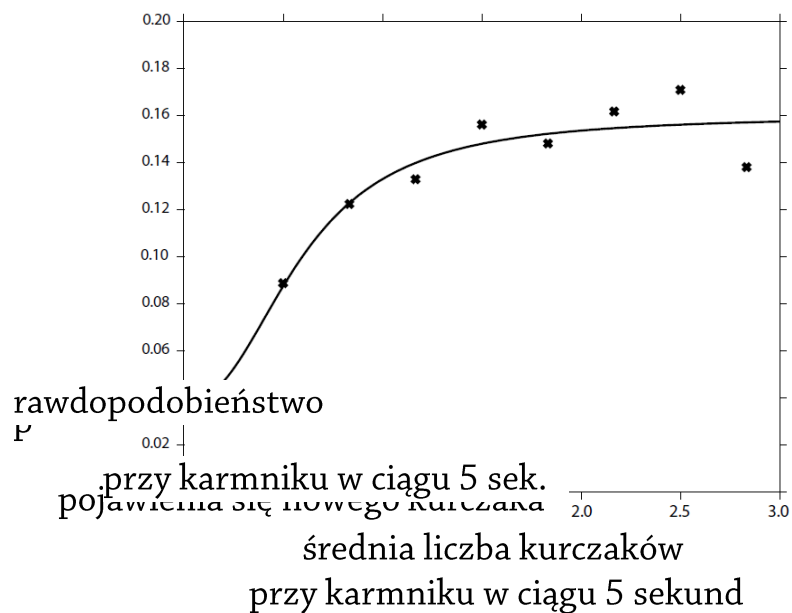
Dalej sytuacja się powtarza.

Różnica faz maleje → synchronizacja

Renato E. Mirollo, Steven H. Strogatz

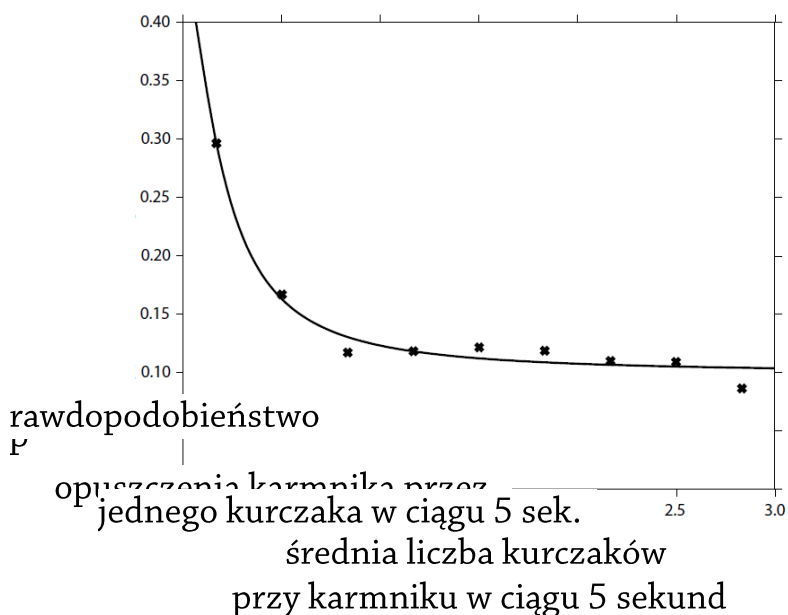
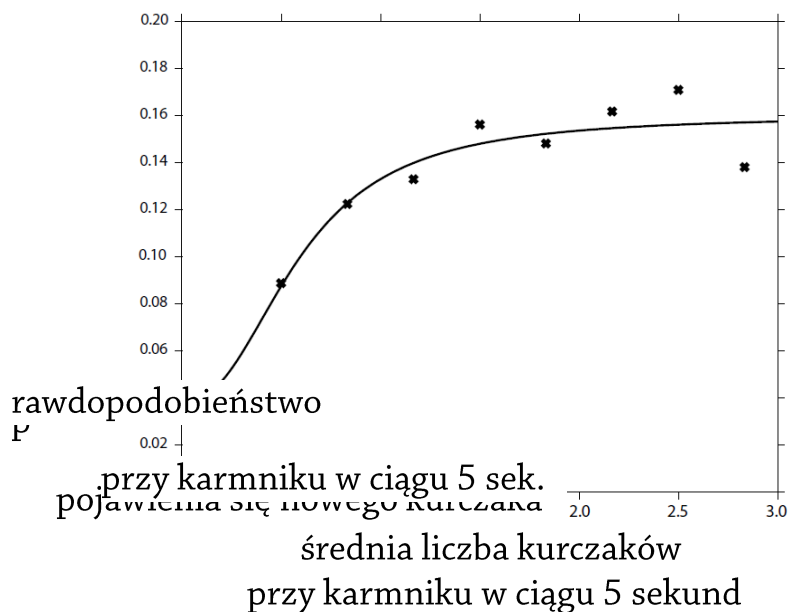
Synchronization of pulse-coupled biological oscillators
SIAM J. on Applied Math., vol. 50, pp. 1645 – 1662 (1990)

model fermy kurczaków - synchronizacja stochastyczna



L.M Collins and D.J.T Sumpter
The feeding dynamics of broiler chickens
J. R. Soc. Interface **4**, 65-72 (2007)

model fermy kurczaków - synchronizacja stochastyczna



$$P_{join} = s_j + (m_j - s_j) \frac{n^{\alpha_j}}{t_j^{\alpha_j} + n^{\alpha_j}}$$

$$P_{leave} = s_l + (m_l - s_l) \frac{n^{\alpha_l}}{t_l^{\alpha_l} + n^{\alpha_l}}$$

n - liczba kurczaków przy karmniku

α_j, α_l - współczynnik nieliniowości

s_j, s_l - prawdopodobieństwo spontanicznego pojawienia się kurczaka przy karmniku (opuszczenia karmnika)

m_j, m_l - maksymalne (minimalne) prawdopodobieństwo pojawienia się (opuszczenia) karmnika przez kurczaka

t_j, t_l - próg odpowiedniej reakcji układu (przybycie nowego lub odejście obecnego kurczaka) na zmianę liczby kurczaków przy karmniku

model fermy kurczaków - synchronizacja stochastyczna

Równanie dynamiki

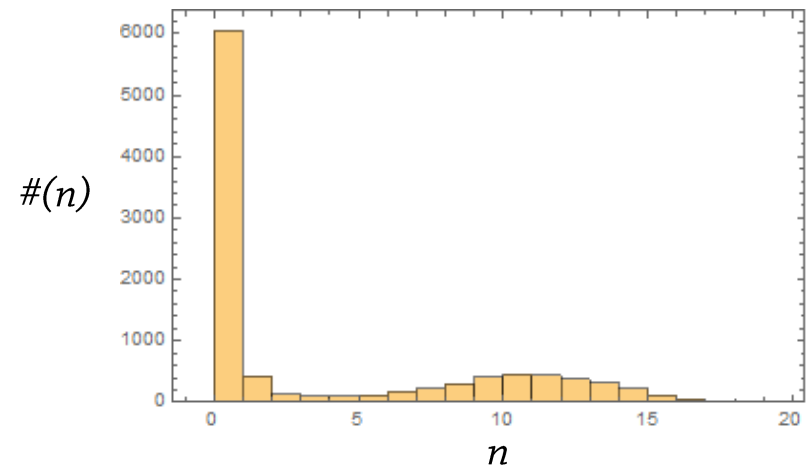
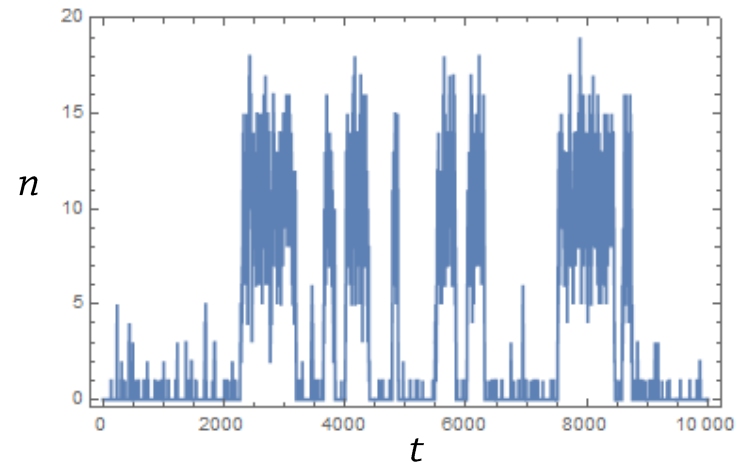
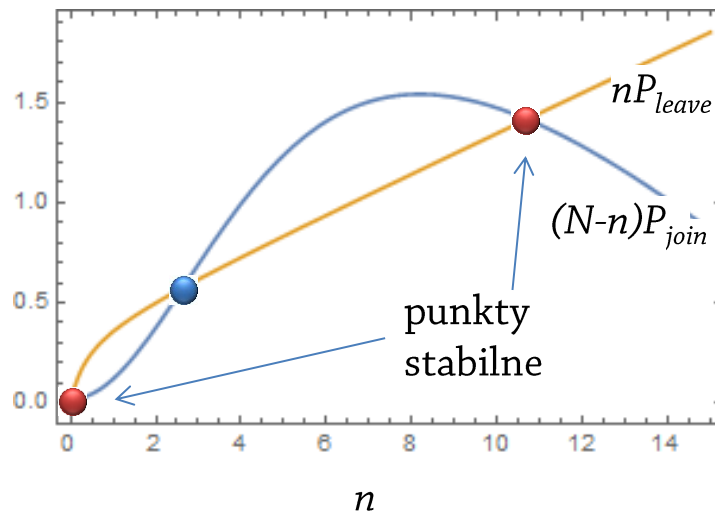
$$\frac{dn}{dt} = P_{join}(N - n) - P_{leave}n$$

Warunek równowagi

$$P_{join}(N - n) = P_{leave}n$$

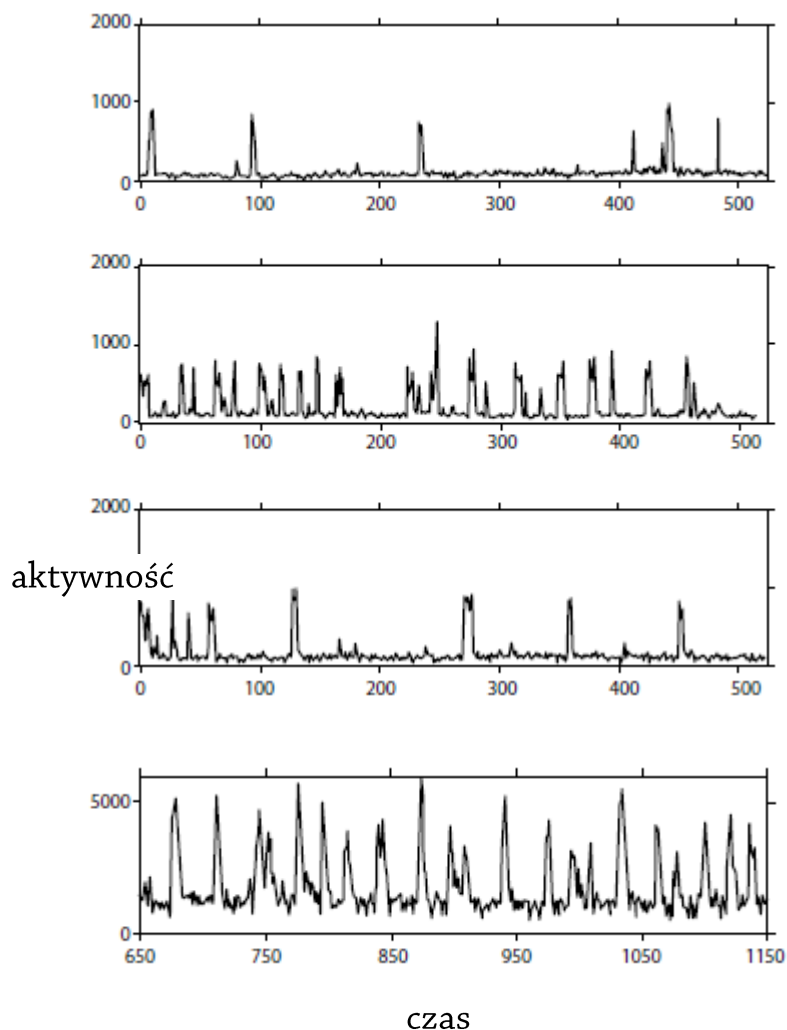
Niech liczba kurczaków $N=20$

Trzy punkty stałe



L.M Collins and D.J.T Sumpter
The feeding dynamics of broiler chickens
J. R. Soc. Interface **4**, 65-72 (2007)

Synchronizacja periodyczna elementów stochastycznych



U mrówek w czasie bezczynności istnieje pewien okres, gdy nie reagują one na bodźce innych trzy pojedynczych mrówek.

Po tym czasie nieaktywne mrówki mogą się obudzić same w czasie danym rozkładem wykładniczym lub też mogą być obudzone przez inne aktywne mrówki.

kolonia

B. J. Cole

Short-Term Activity Cycles in Ants: Generation of Periodicity by Worker Interaction

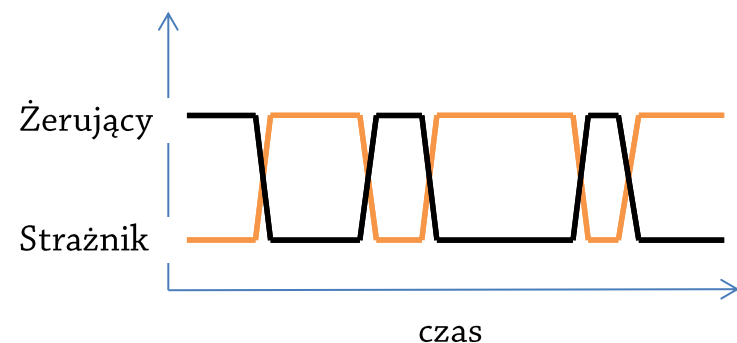
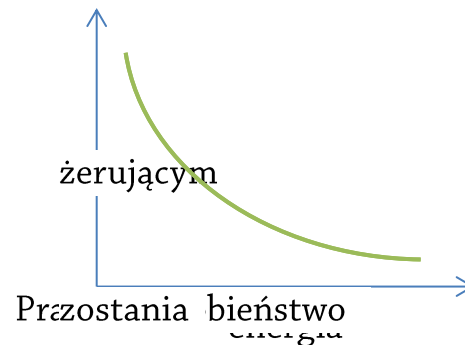
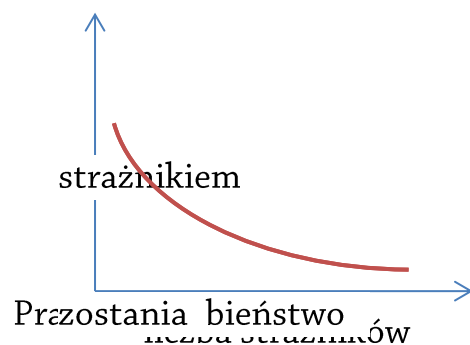
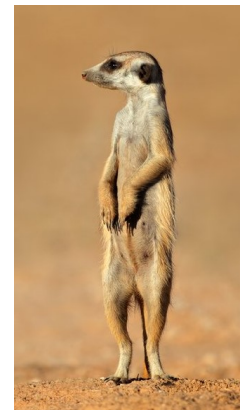
The American Naturalist 137:2, 244–259 (1991)

Anty - synchronizacja

Christian Huygens – sprzężone wahadła

Model surykatek

- Mamy stado $N=2$ surykatek.
- Surykatki mogą albo żerować, albo stać na straży.
- Dylemat producentów i darmozjadów.
- Wpływ odżywienia na podejmowaną decyzję. Energia rośnie tylko podczas żerowania.
- Dygresyjka o dziwogonach.



P.A. Bednekoff

Mutualism among safe, selfish sentinels: a dynamic game

The American Naturalist, 150(3), pp.373-392 (1997)

PODSUMOWANIE

Synchronizacja z wbudowaną periodycznością

- model Kuramoto
- model świetlików
- skurcze serca
- epilepsja

Synchronizacja stochastyczna

- model kurczaków
- owce

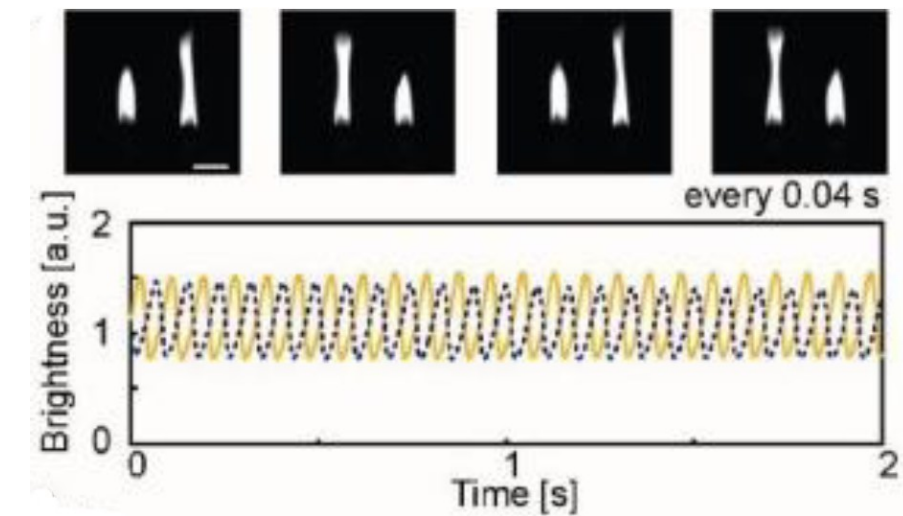
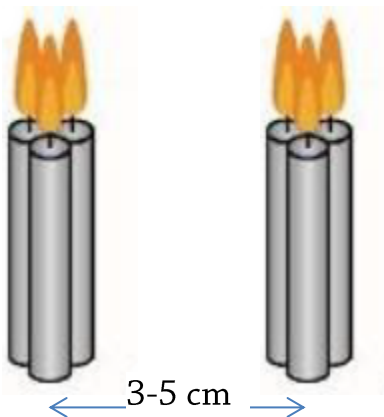
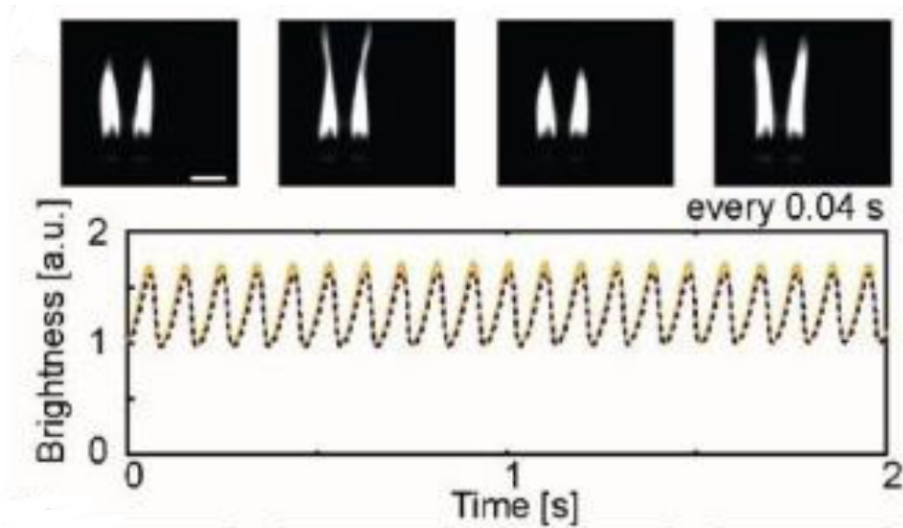
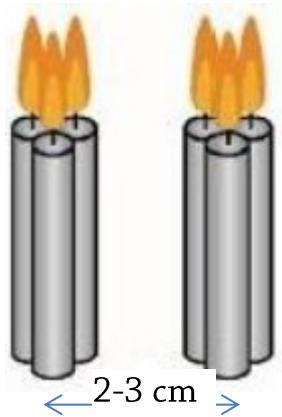
Synchronizacja periodyczna elementów stochastycznych

- aktywność mrówek

Anty-synchronizacja

- Wahadło Huygensa
- żerujący i strażnicy

Na święta...



H. Kitahata et al.
Oscillations and Synchronization in the Combustion of Candles, *J. Phys. Chem.* 113, pp.8164-8168 (2009)

